

Feuille 1

Rappels, variables aléatoires, lois de probabilité, fonctions de répartition.

Exercice 1. Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des événements A , B et C et des opérateurs réunion, intersection, et complémentation :

- au moins un des trois événements a lieu ;
- au plus un des trois événements a lieu ;
- aucun des trois événements n'a lieu ;
- les trois événements ont lieu ;
- exactement un des trois événements a lieu ;
- A et B ont lieu, mais pas C ;
- A a lieu, sinon B n'a pas lieu non plus.

Exercice 2. Soit $a = P(A)$, $b = P(B)$, $C = A \cap B$, et $c = P(C)$. Exprimer $P(\bar{A})$, $P(\bar{A} \cup B)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ en fonction de a , b et c .

Exercice 3. Montrer que

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A} \cap B) = P(A)P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}).$$

Exercice 4. Montrer que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Exercice 5. On jette trois dés. On note X la somme des points obtenus. Calculer la probabilité d'avoir $X = 11$ et $X = 12$.

Exercice 6. Soit A , B , C trois événements indépendants.

- A est-il indépendant de lui-même ? A et $\bar{A}$ sont-ils indépendants ?
- Montrer que $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$ et $(\bar{A}, \bar{B})$ sont des couples d'événements indépendants.
- Montrer que $(A, B \cap C)$ est un couple d'événements indépendants.

Exercice 7. On appelle chemin une suite de segments de longueur 1, dirigés soit vers le haut, soit vers la droite.

- (1) Dénombrer tous les chemins allant d'un point $(0, 0)$ d'un réseau carré à un point (n, n) . En déduire que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

- (2) Montrer que pour $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \binom{n}{k-i}.$$

- (3) Retrouver le résultat précédent en développant de 2 façons différentes $(1+x)^k(1+x)^n$.

Exercice 8. Deux personnes lancent une pièce n fois chacun ($n \geq 1$). Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de faces ?

Exercice 9. Soient A , B , et C trois événements indépendants tels que $P(A) = a$, $P(A \cup B \cup C) = 1 - b$, $P(A \cap B \cap C) = 1 - c$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = x$.

- (1) Montrer que

$$P(B) = \frac{(1-c)(x+b)}{ax}, \quad P(C) = \frac{x}{x+b}.$$

- (2) Montrer que x satisfait l'équation

$$ax^2 + (ab - (1-a)(a-c-1))x + b(1-a)(1-c) = 0.$$

En déduire que

$$c > \frac{(1-a)^2 + ab}{1-a}.$$

Exercice 10. On effectue n contrôles successifs sur une population de N individus, un individu pouvant être contrôlé plusieurs fois.

- (1) Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles. Que vaut $\text{card } \Omega$?
- (2) Trouver le nombre de résultats pour lesquels un individu est contrôlé :
 - k fois ($k \leq n$) ?
 - m fois au cours des r premiers contrôles ($m \leq r \leq n$) ?
 - pour la s -ème fois au t -ème contrôle ($s \leq t \leq n$) ?

Exercice 11. Un point P se déplace dans le plan. A chaque instant, il a une probabilité $p \in [0, 1]$ d'aller de (x, y) à $(x, y + 1)$ et une probabilité $q = 1 - p$ d'aller de (x, y) à $(x + 1, y)$.

- (1) Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0, 0)$, le point P atteigne le point $A(a, b)$?
- (2) Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0, 0)$, le point P atteigne le segment MN , $M = (n, 0)$, $N = (n, n)$?

Exercice 12. Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{e^x}{2} \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(x) + \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

est une fonction de répartition. La fonction F' est-elle une densité de probabilité ?

Exercice 13. Trois urnes A, B, C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

Exercice 14. Une urne contient 5 boules distinctes. On tire 3 boules une à une avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules différentes tirées. Déterminer la loi de X .

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \lambda 3^{-k}$.

- (1) Déterminer λ .
- (2) X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

Exercice 16. On lance une pièce truquée et on note p la probabilité de voir apparaître pile. Soit X le temps d'attente du premier pile. Trouver un entier s tel que $P(X \leq s) \geq 1 - \alpha$, où $\alpha \in]0, 1[$ un réel donné.

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p et soit $M \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les lois de $Z = \inf(X, M)$ et $Y = \sup(X, M)$.

Exercice 18. Un sauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \dots, n, \dots$. Les sauts sont indépendants et la probabilité de succès à la hauteur n , $n \in \mathbb{N}^*$ est $1/n$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du dernier saut réussi. Trouver la loi de X et vérifier que $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Exercice 19. Soit X une variable aléatoire entière telle que $P(X = k) = e^{-2}(1 + \alpha k) \frac{2^k}{4(k!)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déterminer α .

Exercice 20. Soient a et λ des réels strictement positifs. On pose

$$\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

- (1) Montrer que $\Gamma(a) < \infty$.
- (2) Montrer que $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ et en déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n - 1)!$
- (3) On considère f définie par

$$f: x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

Exercice 21. On considère l'espace de probabilités $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ où $P = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_1$.

- (1) Vérifier que P est une probabilité sur $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que $X: \omega \mapsto |\omega|$ est une variable aléatoire et déterminer sa loi.
- (3) Donner la fonction de répartition F_X de X et tracer son graphe.

Exercice 22. Soit X une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$. Autrement dit $\mathbf{P}_X(k) = \binom{3}{k} \frac{1}{4^k} \left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}$ si $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. Tracer le graphe de F_X .

Exercice 23. Soit X une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e. $\mathbf{P}_X(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si $\lambda = 1$ tracer le graphe de F_X .

Exercice 24. On jette deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On désigne par X et Y le maximum et le minimum des points obtenus.

- (1) Proposer un espace de probabilité adapté à cette expérience.
- (2) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- (3) En déduire la loi de X et la loi de Y .

Exercice 25. On lance un dé à 6 faces. On note X le résultat. On lance alors un dé à X faces. On note Y le résultat.

- (1) Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
- (2) En déduire la loi de X et la loi de Y .

Exercice 26. Soit $(\Omega = \{0, 1, 2\}^2, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités et $Z = (X, Y)$ la variable définie sur cet espace ayant pour loi

$$P_Z = \frac{1}{9}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{9}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{9}\delta_{(0,2)} + \frac{2}{9}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{9}\delta_{(1,2)} + \frac{2}{9}\delta_{(2,1)} + \frac{1}{9}\delta_{(2,2)}.$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y ont même loi mais que les couples (X, Y) et (Y, X) n'ont pas la même loi.

Exercice 27.

- (1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Montrer que $X = \mathbf{1}_{[0, 2/3]}$ et $Y = \mathbf{1}_{[1/4, 7/12]} + \mathbf{1}_{[2/3, 1]}$ sont des variables aléatoires. Déterminer leurs lois et leurs fonctions de répartition.
- (2) Soit $(\Omega', \mathcal{A}', P') = (\{1, \dots, 6\}, \mathcal{P}(\{1, \dots, 6\}), P')$ où P' désigne la mesure d'équiprobabilité sur Ω' . On définit $Z : \Omega' \rightarrow \{0, 1\}$ par $Z(\omega') = 1$ si ω' n'est pas divisible par trois. Montrer que Z a la même loi que X et Y alors qu'elle n'est pas définie sur le même espace !

Exercice 28. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{1}{1+x^2} dx$. Vérifier que $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 29. Soit X la variable aléatoire réelle définie sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ par $X(\omega) = 2\omega + 1$. Déterminer sa loi $\mathbf{P}_X$.

Exercice 30. Soient $a > 0$ et $\mathbf{P}$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $\mathbf{P}(A) = \int_A a e^{-ax} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx$.

- (1) (a) Vérifier que $\mathbf{P}$ est une probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi *exponentielle de paramètre a* si elle a pour loi $\mathbf{P}$.
- (b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- (c) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbf{P}(X > x + y \mid X > y) = \mathbf{P}(X > x).$$

- (2) Réciproquement, on suppose que X est une variable aléatoire réelle telle que pour tout réel x , on a $\mathbf{P}(X > x) > 0$, et

$$\mathbf{P}(X > x + y \mid X > y) = \mathbf{P}(X > x) \quad \text{pour tout } x, y \geq 0.$$

- (a) Soit G la fonction définie par $G(x) = \mathbf{P}(X > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$,
$$G(x + y) = G(x)G(y).$$

- (b) Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) = 1$ et en déduire que G est continue en 0. En déduire que G est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Montrer que

$$G(x) = (G(1))^x \quad \text{pour tout } x \geq 0 \quad \text{et} \quad G(x) = 1 \quad \text{pour tout } x < 0.$$

(On montrera tout d'abord le résultat sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Q}$).

(d) Conclure que X suit une loi exponentielle.

Exercice 31. Soit F la fonction donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,\infty[}(x).$$

- (1) Tracer le graphe de F . Montrer qu'il existe une probabilité P admettant F pour fonction de répartition. Décrire P explicitement.
- (2) Trouver la probabilité des événements suivants : $A =]-1/2, 1/2[$, $B =]-1/2, 3/2[$, $C =]2/3, 5/2[$, $D = [0, 2[$, $E =]3, \infty[$.

Exercice 32. Soit F la fonction donnée par

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i}, \infty[}(x).$$

- (1) Montrer que c'est la fonction de répartition d'une probabilité P sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
- (2) Trouver la probabilité des événements suivants : $A = [1, \infty[$, $B = [1/10, \infty[$, $C = \{0\}$, $D = [0, 1/2[$, $E =]-\infty, 0[$, $F =]0, \infty[$, $G =]1, +\infty[$, et $H = [\frac{1}{5}, 1]$.

Exercice 33.

- (1) Soit $(A_\beta)_{\beta \in B}$ une famille d'événements deux à deux disjoints sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que si $P(A_\beta) > 0$ pour tout $\beta \in B$, alors l'ensemble d'indices B est fini ou dénombrable.
- (2) Soit F la fonction de répartition d'une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Montrer que F est continue si et seulement si $P(\{x\}) = 0$ pour tout x réel.
- (3) En déduire que le nombre de points de discontinuité de la fonction de répartition F d'une probabilité est fini ou dénombrable. Peut-il être infini ?
- (4) En déduire que F est continue sur un ensemble dense.

Exercice 34.

- (1) Déterminer $\cap_{n=0}^{+\infty}]1, 1 + \frac{1}{n+1}]$.
- (2) Déterminer $\cap_{n=0}^{+\infty}]1, 2 + \frac{1}{n+1}]$.
- (3) Déterminer $\cap_{n=0}^{+\infty}]1 - \frac{1}{n+1}, 2]$.
- (4) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n+1}, +\infty\right]\right)$.

Exercice 35. Soit Ω un ensemble, et $A_0, A_1, \dots$ des parties de Ω .

- (1) On suppose $A_0 \subset A_1 \subset \dots$. Pour $n \geq 1$, on pose $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Montrer que les ensembles B_n sont deux-à-deux disjoints.
- (2) Montrer que $\cup_{n \geq 0} \overline{A_n} = \overline{\cup_{n \geq 0} A_n}$ et que $\overline{\cup_{n \geq 0} \overline{A_n}} = \cap_{n \geq 0} A_n$.

Exercice 36. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i, I \subset \mathbb{N} \right\}$$

est une tribu.

Exercice 37. On se donne un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}$. Pour tout $x \in \Omega$, on note

$$\delta_x: \begin{cases} \mathcal{A} & \rightarrow [0, 1] \\ B & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

- (1) Montrer que pour tout $x \in \Omega$, δ_x est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ ($\rightsquigarrow$ mesure de Dirac en x).
- (2) Soit $x_1, \dots, x_k$ des éléments distincts de Ω , $k \geq 1$, et $p_1, \dots, p_k \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. On note $P := \sum_{i=1}^k p_i \delta_{x_i} : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$. Montrer que P est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 38. On note λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (on rappelle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tous réels $0 \leq a \leq b \leq 1$).

- (1) Calculer $\lambda(A)$, où $A := \cup_{n \geq 0} \lambda \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right[$.
- (2) Pour $x \in [0, 1]$, calculer $\lambda(\{x\})$.
- (3) Pour $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, calculer $\lambda(\cup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\})$.
- (4) Calculer $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ et $\lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$.